طرائق عددية لتقدير القيم المفقودة في بيانات السلاسل الزمنية

م. انتصار مجيد جاسم
Intisar_majeed@yahoo.com
الجامعة المستنصرية - كلية الادارة والاقتصاد - قسم الاحصاء

المستخلص

يتناول هذا البحث تقدير القيم التي فرضنا بانها مفقودة من السلسلة الزمنية التي تمثل معدلات درجات الحرارة العظمى لمدينة الموصل عام 2001 بطرائق عددية [المربعات الصغرى – الشريحة التكعيبية – الفروق المقسومة – استكمال لاكرانج].

ثم المقارنة بين هذه الطرق ليتسنى لنا تطبيق الطريقة المثلى لتقدير القيم المفقودة في معدلات درجات الحرارة العظمى والصغرى لمدينة الموصل عام 2003.

الكلمات الرئيسية: القيم المفقودة، المربعات الصغرى، الشريحة التكعيبية، الفروق المقسومة، الاستكمال اللاكرانجي.

المقدمة

تتبع الكثير من الظواهر منها الاقتصادية والصحية والزراعية في سلوكها السلاسل الزمنية ونلاحظ فقدان كثير من قيم هذه السلاسل بسبب ظروف غير طبيعية منها الكوارث وويلات الحروب التي تعرض لها بلدنا الحبيب من خلال الغزو الاجنبي وكان أخره 2003 اذ تعطلت الانواء الجوية والرصد الزلزالي. وتظهر القيم المفقودة في السلسلة الزمنية اما بشكل غير منتظم او بشكل منتظم (اي ان السلسلة الزمنية توجد قيمها لعدد ثابت من المرات وتفقد قيمها لعدد ثابت من المرات او تفقد قيمها كمجموعة من القيم المتعاقبة بشكل قطاع).

تمثل مشكلة فقدان بعض المشاهدات في السلسلة الزمنية اهمية خاصة لاسيما في عملية بناء النماذج الرياضية والاحصائية لان التوصل الى نتائج معينة سيكون لها الاثر البالغ في القرارات المبنية على هذه النتائج.

وقد لاحظنا ان اكثر الطرق استخداماً في تقدير القيم المفقودة في السلاسل الزمنية هي نماذج بوكس جينكز Box-Jenkins كما جاء في مصدر [1] ,[3] .

ومن هنا جاءت فكرة استخدام الطرائق العددية [المربعات الصغرى – الشريحة التكعيبية – الفروق المقسومة – استكمال لاكرانج] في تقدير القيم المفقودة في معدلات

درجات الحرارة العظمى والصغرى لمدينة الموصل اولاً ثم معرفة الطريقة المثلى من بين هذه الطرق ثانياً.

وتمثل هذه الدراسة مساهمة بسيطة ومتواضعة في معالجة مشكلة القيم المفقودة التي حصلت من تدهور الوضع الامني والظروف غير الطبيعية الذي أثر على عمل واداء المؤسسات والدوائر الحكومية وحتى القطاعات والشركات المختلطة والاهلية.

هدف البحث

يهدف البحث الى تقدير القيم المفقودة في بيانات السلسلة الزمنية التي تمثل المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى والصغرى لمدينة الموصل لعام 2003 بأستخدام طرق عددية [المربعات الصغرى – الشريحة التكعيبية – الفروق المقسومة – استكمال لاكرانج] والمقارنة بين هذه الطرق لمعرفة الطريقة المثلى في التقدير.

الجانب النظري

ان الكثير من الظواهر تفقد قيمتها لعدة اسباب سنتناول في هذا الجانب ان القيم التي تفقد بشكل عشوائي غير منتظم يمكن تقديرها باستخدام الطرق العددية الاتية:

1. طريقة المربعات الصغرى[1] Least Square Method

لتكن P(X) متعددة الحدود من الدرجة m

$$\boldsymbol{y_{i=}P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_mX^m} \qquad (1)$$

لايجاد حل لــ P(X) نفرض ان

$$\boldsymbol{S = \sum_{i=0}^{N}[y_i - a_0 - a_1\,X_i - \dots\dots\dots - a_m\,X_i^m\,]^2} \qquad (2)$$

S : تمثل مجموع مربعات الانحرافات عن القيم الحقيقية وتعتمد على (m+1) من المعلمات

$a_0\,, a_1\,, \dots\dots\dots, a_m$

حتى تكون قيم S اصغر ما يمكن بالنسبة للمعطيات (x_i, y_i) نأخذ $m < N$,

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \mathbf{0}\,, \frac{\partial S}{\partial a_1} = \mathbf{0}\,, \dots\dots.., \frac{\partial S}{\partial a_m} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

وبشكل عام

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2 \ \sum_{i=0}^{N} X_i^k \,(y_i - a_0 - a_1 X_i - \dots\dots - a_m X_i^m) = \mathbf{0} \qquad (4)$$

لجميع قيم k.

k=0,1,………..,m

حيث ان

$$S_k = \sum_{i=0}^{N} X_i^k\,, \quad t_k = \sum_{i=0}^{N} y_i X^k \qquad (5)$$

يمكن كتابة المعادلات بالشكل الاتي

$$\begin{aligned} &S_0 a_1 + S_1 a_1 + \dots\dots + S_m a_m = t_0 \\ &S_1 a_0 + S_2 a_1 + \dots\dots + S_{m+1} a_m = t_1 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6) \\ &S_m a_0 + S_{m+1} a_1 + \dots\dots + S_{2m} a_m = t_m \end{aligned}$$

ويمكن التعبير عن المعادلات بالمصفوفات

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{S}_0 & \mathrm{S}_1 & \cdots & \mathrm{S}_m \\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & & \mathrm{S}_{m+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{S}_m & \mathrm{S}_{m+1} & \cdots & \mathrm{S}_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \qquad (7)$$

لحل هذا النظام نفرض ان

$$Y = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} , \quad V = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} , \qquad M = \begin{bmatrix} \mathrm{S_0} & \mathrm{S_1} & \cdots & \mathrm{S_m} \\ \mathrm{S_1} & \mathrm{S_2} & & \mathrm{S_{m+1}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{S_m} & \mathrm{S_{m+1}} & \cdots & \mathrm{S_{2m}} \end{bmatrix}$$

حيث ان

$$\boldsymbol{Y = MV}$$

$$\boldsymbol{M^T Y = M^T M\, V}$$

$$(\boldsymbol{M^T M})^{-1}\,(\boldsymbol{M^T Y}) = (\boldsymbol{M^T M})^{-1}\,(\boldsymbol{M^T M})\,\boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{M^T M})^{-1}\ \boldsymbol{M^T Y}$$

2. الشريحة التكعيبية [4] Cubic Spline

P(X) دالة متعددة الحدود من الدرجة m

$$\boldsymbol{P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots\dots\dots + a_m X^m}$$

معرفة على الفترة $[,b]$

$$\boldsymbol{a = X_0 < X_1 < X_2 \dots\dots < X_n = b_n} \qquad (8)$$

بحيث ان

$$\boldsymbol{g(X_0) = P(X_0)\,,\, g(X_1) = P(X_1), \dots\dots.\, g(x_n) = p(x_n)} \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{g'^{(X_0)} = k_0\,,\, g'^{(X_1)} = k_1, \dots\dots.\, g'^{(x_n)} = k_n} \qquad (10)$$

حيث: $\mathrm{k_0}\,,\mathrm{k_1}\,,\dots\dots\dots,\mathrm{k_n}$ هي قيم معطاة بالمسألة وعليه توجد شريحة تكعيبية واحدة فقط g(x) تحقق 8,9,10 .

نفرض الشريحة التكعيبية بالشكل

$$y_{i+1} = A_i(X - X_i)^3 + B_i(X - X_i)^2 + C_i(X - X_i) + D_i \quad (11)$$

$$on \quad [X_i, X_{i+1}] \quad i = 0, 1, \dots\dots, n-1$$

لتكن

$$y_i = D_i \quad (12)$$

$$H_i = X_{i+1} - X_i$$

$$y_{i+1} = A_i H_i^3 + B_i H_i^2 + C_i H_i + y_i \quad (13)$$

$$y'_{i+1} = 3\,A_i H_i^2 + 2\,B_i H_i + c_i \quad (14)$$

$$y''_{i+1} = 6\,A_i H_i + 2\,B_i \quad (15)$$

لتكن

$$S_{i+1} = y''_{i+1}, \quad S_i = y''_i$$

$$S_i = 6\,A_i(X_{i+1} - X_i) + 2\,B_i \qquad i = 0, 1, \dots\dots, n-1$$

$$B_i = \frac{S_i}{2} \quad (16)$$

نعوض في المعادلة (5)

$$S_{i+1} = 6\,A_i H_i + S_i$$

$$4A_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6\,H_i} \quad (17)$$

لايجاد قيم C_i نعوض في المعادلة (14)

$$y_{i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{6\,H_i} H_i^3 + \frac{S_i}{2} H_i^2 + C_i H_i + y_i$$

$$y_{i+1} - y_i = \left[\frac{S_{i+1} - S_i}{6} + \frac{S_i}{2}\right] H_i^2 + C_i H_i$$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{S_{i+1} - S_i + 3S_i}{6} H_i^2 + C_i H_i$$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{S_{i+1} + 2\,S_i}{6} H_i^2 + C_i H_i$$

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{H_i} - H_i \frac{S_{i+1} + 2S_i}{6} \qquad (18)$$

عندما نعوض قيم B_i, C_i ، i بالمعادلة (14) وبالفترة $[X_{i-1}, X_i]$ نحصل على

$$\grave{y}_i = 3\,A_{i-1}\,(X_i - X_{i-1})^2 + 2\,B_{i-1}(X_i - X_{i-1}) + C_{i-1}$$

$$= 3\,A_{i-1} H_{i-1}^2 + 2\,B_{i-1} H_{i-1} + C_{i-1}$$

$$= 3\,\frac{S_i - S_{i-1}}{6H_{i-1}} H_{i-1}^2 + 2\,\frac{S_{i-1}}{2} H_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{H_{i-1}}$$

$$-2\,\frac{H_{i-1}(S_{i-1} + S_i)}{6} \qquad (19)$$

من خلال تبسيط معادلة (19) نحصل على

$$H_{i-1}S_{i-1} + (2\,H_{i-1} + 2\,H_i)S_i + H_i S_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{H_{i-1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{H_{i-1}}\right)$$

اذا عبرنا عن معادلة (19) بالمصفوفات

تكون معاملات المصفوفة حسب الحالات التالية:

1. اذا كانت نهايات الشريحة التكعيبية تقترب خطياً من الاطراف فيكون

$S_0=0$ ، $S_n = 0$ (وهذه تسمى شريحة طبيعية Natural Spline) .

مصفوفة −1−

$$\begin{bmatrix} 2(H_0+H_1) & H_1 & & & \\ H_1 & 2(H_1+H_2) & H_2 & & \\ & H_2 & 2(H_2+H_3) & H_3 & \\ & & & \vdots & \\ & & & H_{n-2} & 2(H_{n-2}+H_{n-1}) \end{bmatrix}$$

.2 اذا كان $F'(X_0)=A\ ,\ F'(X_n)=B$ A,B قيم ثوابت تكون الجهة اليسرى من المعادلة (19)

$$[[2H_0\,S_0+H_1\,S_1=6\left(F\left[X_0,X_1\right]-A\right)]]$$

تكون الجهة اليمنى من المعادلة (19)

$$H_{n-1}\,S_{n-1}+2H_n\,S_n=6\left(B-F\left[X_{n-1},X_n\right]\right)$$

تكون المصفوفة بالشكل :

مصفوفة−2−

$$\begin{bmatrix} 2H_0 & H_1 & & & \\ H_0 & 2(H_0+H_1) & H_1 & & \\ & H_1 & 2(H_1+H_2) & H_2 & \\ & & & \vdots & \\ & & & H_{n-1} & 2H_{n-1} \end{bmatrix}$$

3. اذا كانت الاطراف النهائية للشريحة التكعيبية تقترب من القطع المكافئ

$$S_0 = S_1 \;\&\; S_{n-1} = S_{n-2}$$

تكون المصفوفة بالشكل :

مصفوفة −3−

$$\begin{bmatrix} 3H_0+2H_1 & H_1 & & & \\ H_1 & 2(H_1+H_2) & H_2 & & \\ & H_2 & 2(H_2+H_3) & H_3 & \\ & & & \vdots & \\ & & & H_{n-2} & 2(H_{n-2}+3H_{n-1}) \end{bmatrix}$$

4. اذا كانت S_0 تملك استقرار خطي بالنسبة لــ $S_1, S_2, \cdots, S_n$ اي يوجد استقرار خطي بين S_{n-1}, S_{n-2}

نستخدم العلاقة:

$$\frac{S_1 - S_0}{H_0} = \frac{S_2 - S_1}{H_1}$$

تكون الجهة اليسرى من المعادلة (19)

$$S_0 = \frac{(H_0 + H_1)S_1 - H_0 S_2}{H_1}$$

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{H_{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_{n-2}}{H_{n-2}}$$

وتكون الجهة اليمنى من المعادلة (19)

$$S_n = \frac{(H_{n-2} + H_{n-1})\, S_{n-1} - H_{n-1}\, S_{n-2}}{H_{n-2}}$$

بعد حل هذه المعادلات نحصل على علاقة بين S_0, S_n وتكون المصفوفة بالشكل

مصفوفة-4-

$$\begin{bmatrix} \frac{(H_0+H_1)(H_0+2H_1)}{H_1} & \frac{H_1^2-H_0^2}{H_1} & & \\ H_1 & 2(H_1+H_2) & H_2 & \\ & & 2(H_2+H_3) & H_3 \\ & & \frac{H_{n-2}^2-H_{n-1}^2}{H_{n-2}} & \frac{(H_{n-1}+H_{n-2})(H_{n-1}+2H_{n-2})}{H_{n-2}} \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد قيم A_i, B_i, C_i, D_i للشريحة في اي فترة ثم نحسب المشاهدات المفقودة.

3. طريقة الفروق المقسومة Divided Differences [3]

وهي عبارة عن الفرق P لاختلاف قيمة الدالة $Y = f(x)$ مقسوم على البعد المقابل لقيمة المؤشر X .

تستخدم هذه الفروق عندما تكون الابعاد في قيم المؤشر غير متساوية

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i}$$

ويمكن التعبير عنها بالجدول الاتي:

X	Y	Δ	Δ^2	Δ^3
X_0	y_0	$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$		
X_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_1}$	
X_2	y_2	$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$
X_3	y_3		$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$	
$\vdots$ x_k	$\vdots$ y_k			
				$\Delta^k y_0 = \frac{\Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0}{x_k - x_0}$

ويمكن اعتماد صيغة نيوتن للفروق المقسومة.

$$y_p = y_0 + (x_p - x_0)\Delta y_0 + (x_p - x_0)(x_p - x_1)\Delta^2 y_0 + \cdots + (x_p - x_0) \ldots\ldots (x_p - x_{k-1})\Delta^k y_0 \quad (20)$$

حيث ان P : تمثل النقطة المفقودة

y_0 : يمثل النقطة الاولى لجدول البيانات بغض النظر عن موقع النقطة المفقودة.

4. طريقة الاستكمال اللاكرانجي [3] Lagrange Interpolation

لتكن $P(X)$ متعددة حدود من الدرجة $(n-1)$

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots \ldots + a_{n-1} X^{n-1}$$

حيث ان

$$y_1 = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_1^2 + \cdots \ldots\ldots + a_{n-1} X_1^{n-1}$$

$$y_2 = a_0 + a_1 X_2 + a_2 X_2^2 + \cdots \ldots + a_{n-1} X_2^{n-1} \quad (21)$$

$\vdots$

$$\mathbf{y_n = a_0 + a_1X_n + a_2X_n^2 + \cdots \ldots\ldots + a_{n-1}X_{n-1}^{n-1}}$$

هذه n من المعادلات لــ n من المتغيرات $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}$

لغرض حل المنظومة (21) نعرف n دوال جديدة جميعها متعددات الحدود من الدرجة (n-1)

$$\prod_1(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-\mathbf{X_2})(\mathbf{X}-\mathbf{X_3})\ldots\ldots\ldots.(\mathbf{X}-\mathbf{X_n})$$

$$\prod_2(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-\mathbf{X_1})(\mathbf{X}-\mathbf{X_3})\ldots\ldots\ldots.(\mathbf{X}-\mathbf{X_n}) \qquad (22)$$

:

$$\prod_n(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-\mathbf{X_1})(\mathbf{X}-\mathbf{X_2})\ldots\ldots\ldots.(\mathbf{X}-\mathbf{X_n})$$

يمكن كتابة (22) بشكل مختصر

$$\prod_i(\mathbf{X}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(\mathbf{X}-\mathbf{X_j}) \qquad \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots\ldots, n} \qquad (23)$$

$\prod$ يمثل عملية الضرب وان $\prod_i(X_i) \neq 0$ وان $\prod_i(X_j) = 0$, for $i \neq j$

ويمكن كتابة $P(X)$ بصفة اعتماد خطي لــ $\prod 1, \prod 2, \ldots\ldots, \prod n$

$$\boldsymbol{P(X) = b_1\prod_1(X) + b_2\prod_2(X) + \cdots\ldots\ldots + b_n\prod_n(X)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{b_i\prod_i(X)} \qquad (24)$$

نعوض $_k$ في (24)

$$\boldsymbol{P(X) = b_k\prod_k(X_k)} \qquad (25)$$

$$\boldsymbol{y_k = P(X_k)}$$

$$\boldsymbol{b_k = \frac{y_k}{\prod_k(X_k)}} \qquad (26)$$

$$\boldsymbol{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i} \frac{\prod_i(\boldsymbol{X})}{\prod_i(\boldsymbol{X_i})}$$

$$\boldsymbol{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i} \frac{\prod(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_j})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}(\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{X_j})}$$

$$\boldsymbol{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X_j}}{\boldsymbol{X_i}-\boldsymbol{X_j}}\right) \tag{27}$$

وهذه صيغة استكمال لاكرانج

الجانب التطبيقي

يتضمن تطبيق الطرق العددية [المربعات الصغرى – الشريحة التكعيبية – الفروق المقسومة – استكمال لاكرانج]على سلسلة زمنية مكونة من (10) مشاهدات تمثل المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى للاشهر (كانون الثاني ، شباط ،اذار_نيسان ،ايار_حزيران ،تموز ،اب ،ايلول ،تشرين الاول) لمدينة الموصل لعام 2001 من وزارة النقل (الهيئة العامة للانواء الجوية والرصد الزلزالي قسم المناخ) واعتبار ثلاث مشاهدات منها مفقودة $t = 3,4,6$. [الجدول -1-]

ليتسنى لنا معرفة الطريقة الاكثر دقة من خلال مقارنة نتائج القيم المفقودة مع القيم الحقيقية ثم حساب معدل الخطأ المطلق لكل طريقة.

[فالطريقة المثلى يكون معدل الخطأ المطلق فيها اقل من معدلات الخطأ المطلق للطرق الاخرى] .

فيما يلي جدول بالمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى لمدينة الموصل لعام2001

جدول -1- يوضح المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى لمدينة الموصل عام 2001

t	$X(t)$ $Actual\,Value$	
1	14.1	
2	15.8	
3	22.2	Mis
4	26.2	Mis
5	32.3	
6	40.6	Mis
7	44.1	
8	44	
9	39.2	
10	31.4	

1. طريقة المربعات الصغرى Least Square Method

لتعيين القيم المفقودة في جدول -1- نفرض ان

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \tag{28}$$

متعدد الحدود من الدرجة الثالثة. حيث ان

$$t = 1 , X(1) = 14.1 , t = 2 , X(2) = 15.8 , t = 5 , X(5) = 32.3 , t = 7 , X(7) = 44.1$$

واعتبار $t = 3,4,6$ قيم مفقودة .

ويمكن كتابة المعادلات الخطية بالشكل التالي.

$$14.1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$15.8 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3$$

$$32.3 = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3$$

$$44.1 = a_0 + 7a_1 + 49a_2 + 343a_3$$

حيث ان

$$Y = \begin{bmatrix} 14.1 \\ 15.8 \\ 32.3 \\ 44.1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

بعد حل هذه المعادلات بالاستعانة بالبرنامج الجاهز(Linear-Algebra Toolkit) والموجود على الموقع الالكتروني:

www.math.odu.edu/Nbogacki/cgi-bin/Lat.cgi?c=sys

$$V = \begin{bmatrix} 15.75 \\ -3.615 \\ 2.11 \\ -0.146 \end{bmatrix}$$

نحصل على :

$$a_0 = 15.75 \ , a_1 = -3.615 \ , a_2 = 2.11 \ , a_3 = -0.146$$

نعوض بالمعادلة رقم (28)

$$Y = 15.75 - 3.615\,X + 2.11\,X^2 - 0.146\,X^3$$

$$if \ \ t = 3 \ , X(3) = 19.953$$

$$t = 4 \ , X(4) = 25.706$$

$$t = 6 \ , X(6) = 38.484$$

2. طريقة الشريحة التكعيبية Cubic Spline Method

اولاً نحسب الفترات H_i ، $i = 0,1,2,3,4,5$

$$\mathbf{H_0 = 2 - 1 = 1}$$

$$\mathbf{H_1 = 5 - 2 = 3}$$

$$\mathbf{H_2 = 7 - 5 = 2}$$

$$\mathbf{H_3 = 8 - 7 = 1}$$

$$\mathbf{H_4 = 9 - 8 = 1}$$

$$\mathbf{H_5 = 10 - 9 = 1}$$

حسب صيغة الشريحة التكعيبية الطبيعية شكل (1) نحل النظام

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{32.3-15.8}{3} - \frac{15.8-14.1}{1} \\ \frac{44.1-32.3}{2} - \frac{32.3-15.8}{3} \\ \frac{44-44.1}{1} - \frac{44.1-32.3}{2} \\ \frac{39.2-44}{1} - \frac{44-44.1}{1} \\ \frac{31.4-39.2}{1} - \frac{39.2-44}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.8 \\ 2.4 \\ -36 \\ -28.2 \\ -18 \end{bmatrix}$$

بعد حل هذه المعادلات (بالاستعانة بنفس البرنامج الجاهز السابق) نحصل على :

$$\boldsymbol{S_0 = 0\,, S_1 = 2.65\,, S_2 = 0.514\,, S_3 = 5.356\,, S_4 = -4.891\,, S_5 = -3.277\,, S_6 = 0}$$

حيث ان :

$$D_1 = 15.8 \qquad D_2 = 32.3$$

$$B_1 = 1.328 \qquad B_2 = 0.257$$

$$A_1 = -0.119 \qquad A_2 = 0.403$$

$$C_1 = 2.586 \qquad C_2 = 3.772$$

حسب المعادلة (13)

وبالفترة [2,5]

$$f_1(t) = A_1(t-2)^3 + B_1(t-2)^2 + C_1(t-2) + D_1$$

$$f_1(3) = 19.595$$

$$f_1(4) = 25.333$$

وبالفترة [5,7]

$$f_2(t) = A_2(t-5)^3 + B_2(t-5)^2 + C_2(t-5) + D_2$$

$$f_2(6) = 36.732$$

3. طريقة الفروق المقسومة Divided Differences Method

صيغة نيوتن للفروق المقسومة (حسب المعادلة (20))

$$\begin{aligned} y_p = y_0 &+ (t_p - t_0)\Delta y_0 + (t_p - t_0)(t_p - t_1)\Delta^2 y_0 \\ &+ (t_p - t_0)(t_p - t_1)(t_p - t_2)\Delta^3 y_0 \\ &+ (t_p - t_0)(t_p - t_1)(t_p - t_2)(t_p - t_3)\Delta^4 y_0 \\ &+ (t_p - t_0)(t_p - t_1)(t_p - t_2)(t_p - t_3)(t_p - t_4)\Delta^5 y_0 \\ &+ (t_p - t_0)(t_p - t_1)(t_p - t_2)(t_p - t_3)(t_p - t_4)(t_p - t_5)\Delta^6 y_0 \end{aligned}$$

حيث ان t_p تمثل القيمة المفقودة.

T	X(t)
1	14.1
	$\xrightarrow{\Delta y_0} 1.7$
2	$15.8 \quad \xrightarrow{\Delta^2 y_0} 0.95$
	$\xrightarrow{\Delta y_1} 5.5 \quad \xrightarrow{\Delta^3 y_0} -0.145$
5	$32.3 \quad \xrightarrow{\Delta^2 y_1} 0.08 \quad \xrightarrow{\Delta^4 y_0} -0.028$
	$\xrightarrow{\Delta y_2} 5.9 \quad \xrightarrow{\Delta^3 y_1} -0.346 \quad \xrightarrow{\Delta^5 y_0} 0.008$
7	$44.1 \quad \xrightarrow{\Delta^2 y_2} -2 \quad \xrightarrow{\Delta^4 y_1} 0.042$ $\xrightarrow{\Delta^6 y_0} -0.0005$
	$\xrightarrow{\Delta y_3} -0.1 \quad \xrightarrow{\Delta^3 y_2} -0.05 \quad \xrightarrow{\Delta^5 y_1} 0.003$
8	$44 \quad \xrightarrow{\Delta^2 y_3} -2.56 \quad \xrightarrow{\Delta^4 y_2} 0.066$
	$\xrightarrow{\Delta y_4} -4.8 \quad \xrightarrow{\Delta^3 y_3} 0.283$
9	$39.2 \quad \xrightarrow{\Delta^2 y_4} -1.5$
	$\xrightarrow{\Delta y_5} -7.8$
10	31.4

عند التعويض في صيغة نيوتن نحصل على

$$t = 3\,, \qquad X(3) = 18.652$$

$$t = 4\,, \qquad X(4) = 24.51$$

$$t = 6\,, \qquad X(6) = 39.64$$

4. الاستكمال اللاكرانجي Lagrange Interpolation

حسب صيغة الاستكمال اللاكرانجي (معادلة (27))

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{X - X_j}{X_i - X_j}\right) \qquad , \quad n = 6$$

حيث ان

$$\prod\nolimits_0(t) = (t-2)(t-5)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)$$

$$\prod\nolimits_1(t) = (t-1)(t-5)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)$$

$$\prod\nolimits_2(t) = (t-1)(t-2)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)$$

$$\prod\nolimits_3(t) = (t-1)(t-2)(t-5)(t-8)(t-9)(t-10) \qquad (29)$$

$$\prod\nolimits_4(t) = (t-1)(t-2)(t-5)(t-7)(t-9)(t-10)$$

$$\prod\nolimits_5(t) = (t-1)(t-2)(t-5)(t-7)(t-8)(t-10)$$

$$\prod\nolimits_6(t) = (t-1)(t-2)(t-5)(t-7)(t-8)(t-9)$$

$$if \;\; t = 1 , \prod\nolimits_0(1) = 12096 , t = 2 ,$$

$$\prod\nolimits_1(2) = -5040 , t = 5 , \prod\nolimits_2(5) = 1440$$

$$t = 7 , \prod\nolimits_3(7) = -360 , t = 8 , \prod\nolimits_4(8) = 252 ,$$

$$t = 9 , \prod\nolimits_5(9) = -448$$

$$t = 10 , \prod\nolimits_6(10) = 2160$$

لحساب القيم المفقودة الاولى نعوض $t = 3$ في (29)

$$\prod\nolimits_0(3) = -1680 , \prod\nolimits_1(3) = -3360 , \prod\nolimits_2(3) = 1680 ,$$

$$\prod\nolimits_3(3) = 840 , \quad \prod\nolimits_4(3) = 672 , \prod\nolimits_5(3) = 560 , \prod\nolimits_6(3) = 480$$

ثم نعوض هذه القيم في صيغة الاستكمال اللاكرانجي معادلة (27)

$$\boldsymbol{X(3)=\frac{\prod_0(3)}{\prod_0(1)}\,14.1+\frac{\prod_1(3)}{\prod_1(2)}\,15.8+\frac{\prod_2(3)}{\prod_2(5)}\,32.3}$$

$$\boldsymbol{+\frac{\prod_3(3)}{\prod_3(7)}\,44.1+\frac{\prod_4(3)}{\prod_4(8)}\,44+\frac{\prod_5(3)}{\prod_5(9)}\,39.2+\frac{\prod_6(3)}{\prod_6(10)}\,31.4}$$

$$\boldsymbol{X(3)=18.654}$$

ولحساب القيمة المفقودة الثانية نعوض $t = 4$ في صيغة الاستكمال اللاكرانجي معادلة (27)

$$\boldsymbol{\prod_0(4)=-720\,,\prod_1(4)=-1080\,,\prod_2(4)=2160\,,\prod_3(4)}$$

$$\boldsymbol{=720\,,\prod_4(4)=540\,,\prod_5(4)=432\,,\prod_6(4)=360}$$

$$\boldsymbol{X(4)=\frac{\prod_0(4)}{\prod_0(1)}\,14.1+\frac{\prod_1(4)}{\prod_1(2)}\,15.8+\frac{\prod_2(4)}{\prod_2(5)}\,32.3+\frac{\prod_3(4)}{\prod_3(7)}\,44.1+\frac{\prod_4(4)}{\prod_4(8)}\,44+\frac{\prod_5(4)}{\prod_5(9)}\,39.2+\frac{\prod_6(4)}{\prod_6(10)}\,31.4}$$

$$\boldsymbol{=26.258}$$

ولحساب القيمة المفقودة الثالثة نعوض $t = 6$ في صيغة الاستكمال اللاكرانجي معادلة (27)

$$\boldsymbol{\prod_0(6)=96\,,\prod_1(6)=120\,,\prod_2(6)=480\,,\prod_3(6)}$$

$$\boldsymbol{=-480\,,\prod_4(6)=-240\,,\prod_5(6)=-160\,,\prod_6(6)=-120}$$

$$\boldsymbol{X(6)=\frac{\prod_0(6)}{\prod_0(1)}\,14.1+\frac{\prod_1(6)}{\prod_1(2)}\,15.8+\frac{\prod_2(6)}{\prod_2(5)}\,32.3}$$

$$+\frac{\prod_3(6)}{\prod_3(7)}\,44.1+\frac{\prod_4(6)}{\prod_4(8)}\,44+\frac{\prod_5(6)}{\prod_5(9)}\,39.2+\frac{\prod_6(6)}{\prod_6(10)}\,31.4$$

$$=39.653$$

فيما يلي جدول(2) يوضح تقدير القيم المفقودة بالطرق العددية الاربعة

جدول-2-

يوضح تقدير القيم المفقودة بالطرق العددية الاربعة

T	X(t)	L.S.	C.S	D.D	L.I
1	14.1				
2	15.8				
3	22.2	19.953	19.595	18.652	18.654
4	26.2	25.706	25.333	24.51	26.258
5	32.3				
6	40.6	38.484	36.732	39.64	39.653
7	44.1				
8	44				
9	39.2				
10	31.4				

ولمعرفة الطريقة التي اعطت افضل النتائج للقيم المفقودة.

نحسب معدل الخطأ المطلق لكل طريقة كما يتضح في جدول -3-

جدول -3-

يوضح معدل الخطا المطلق للطرق العددية الاربعة

الطريقة	$e_{X(3)}$	$e_{X(4)}$	$e_{X(6)}$	معدل الخطأ المطلق
المربعات الصغرى	2.247	0.494	2.116	4.857
الشريحة التكعيبية	2.605	0.867	3.868	7.34
الفروق المقسومة	3.548	1.69	0.96	6.198
استكمال لاكرانج	3.546	0.058	0.947	4.551

نلاحظ ان اقل خطأ هو 4.551 في طريقة الاستكمال اللاكرانجي لذلك تعتبر افضل الطرق وبعدها بالترتيب طريقة المربعات الصغرى ثم الفروق المقسومة ثم الشريحة التكعيبية. سوف نطبق طريقة الاستكمال اللاكرانجي معادلة (27) على المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى والصغرى في مدينة الموصل لعام 2003 وحسب الاشهر (كانون الثاني ، شباط،اذار،نيسان،ايار،حزيران،تموز،اب ،ايلول ،تشرين الاول) وكانت المشاهدات ($t=2,3,5$) مفقودة وذلك للدقة العالية التي تمتاز بها هذه الطريقة ولاحظنا ذلك من خلال معدل الخطأ المطلق الانف الذكر.

جدول [4] يبين معدلات درجات الحرارة العظمى لمدينة الموصل لعام 2003 والقيم المفقودة هي $t = 2,3,5$

جدول-4-

يوضح المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى لمدينة الموصل لعام 2003وتقدير القيم المفقودة فيها

T	X(t)	Estimate
1	12.1	
2	Mis	15.7
3	Mis	16.2
4	17.1	
5	Mis	25.9
6	34.7	
7	40.4	
8	43.3	
9	44.3	
10	37.9	

حيث ان

$$\prod_0(\mathbf{t}) = (t-4)(t-6)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)$$

$$\prod_1(\mathbf{t}) = (t-1)(t-6)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)$$

$$\prod_2(t) = (t-1)(t-4)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)$$

$$\prod_3(\mathbf{t}) = (t-1)(t-4)(t-6)(t-8)(t-9)(t-10) \qquad (30)$$

$$\prod_4(t) = (t-1)(t-4)(t-6)(t-7)(t-9)(t-10)$$

$$\prod_5(\mathbf{t}) = (t-1)(t-4)(t-6)(t-7)(t-8)(t-10)$$

$$\prod_6(t) = (t-1)(t-4)(t-6)(t-7)(t-8)(t-9)$$

نعوض المشاهدات المعلومة $t = 1,4,6,7,8,9,10$

$\prod_0(1) = 45360$ $\prod_4(8) = 112$

$\prod_1(4) = -2160$ $\prod_5(9) = -240$

$\prod_2(6) = 240$ $\prod_6(10) = 1296$

$\prod_3(7) = -108$

لحساب القيمة المفقودة $t = 2$ نعوض في المعادلة (30) ونحصل على

$\prod_0(2) = 13440$ $\prod_4(2) = -2240$

$\prod_1(2) = -6720$ $\prod_5(2) = -1920$

$\prod_2(2) = -3360$ $\prod_6(2) = -1680$

$\prod_3(2) = -2688$

ثم نعوض هذه القيم في صيغة لاكرانج معادلة (27)

$$X(2) = \frac{\prod_0(2)}{\prod_0(1)}\,12.1 + \frac{\prod_1(2)}{\prod_1(4)}\,17.1 + \frac{\prod_2(2)}{\prod_2(6)}\,34.7 + \frac{\prod_3(2)}{\prod_3(7)}\,40.4 + \frac{\prod_4(2)}{\prod_4(8)}\,43.3 + \frac{\prod_5(2)}{\prod_5(9)}\,44.3 + \frac{\prod_6(2)}{\prod_6(10)}\,37.9$$

$\mathbf{X(2) = 15.7}$

ولحساب القيمة المفقودة $t = 3$ نعوض في المعادلة (30) ونحصل على

$\prod_0(3) = 2520$ $\prod_4(3) = 1008$

$\prod_1(3) = -5040$ $\prod_5(3) = 1022$

$\prod_2(3) = 1680$ $\prod_6(3) = 720$

$$\prod_3(3) = 1260$$

ثم نعوض هذه القيم في صيغة لاكرانج معادلة (27)

$$X(3) = \frac{\prod_0(3)}{\prod_0(1)}\, 12.1 + \frac{\prod_1(3)}{\prod_1(4)}\, 17.1 + \frac{\prod_2(3)}{\prod_2(6)}\, 34.7$$

$$+\frac{\prod_3(3)}{\prod_3(7)}\, 40.4 + \frac{\prod_4(3)}{\prod_4(8)}\, 43.3 + \frac{\prod_5(3)}{\prod_5(9)}\, 44.3 + \frac{\prod_6(3)}{\prod_6(10)}\, 37.9$$

$$X(3) = 16.2$$

ولحساب القيمة المفقودة $t = 5$ نعوض في المعادلة (30) ونحصل على

$$\prod_0(5) = -120 \qquad \prod_4(5) = 160$$

$$\prod_1(5) = -480 \qquad \prod_5(5) = 120$$

$$\prod_2(5) = 480 \qquad \prod_6(5) = 96$$

$$\prod_3(5) = 240$$

ثم نعوض هذه القيم في صيغة لاكرانج معادلة (27)

$$X(5) = \frac{\prod_0(5)}{\prod_0(1)}\, 12.1 + \frac{\prod_1(5)}{\prod_1(4)}\, 17.1 + \frac{\prod_2(5)}{\prod_2(6)}\, 34.7 + \frac{\prod_3(5)}{\prod_3(7)}\, 40.4 + \frac{\prod_4(5)}{\prod_4(8)}\, 43.3 + \frac{\prod_5(5)}{\prod_5(9)}\, 44.3 + \frac{\prod_6(5)}{\prod_6(10)}\, 37.9$$

$$X(5) = 25.9$$

سوف نطبق طريقة الاستكمال اللاكرانجي معادلة (27) على معدلات درجات الحرارة الصغرى لمدينة الموصل لعام 2003 . جدول [5] يبين معدلات درجات الحرارة الصغرى لمدينة الموصل لعام 2003 والقيم المفقودة هي $t = 2,3,5$

جدول -5-

يوضح المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى لمدينة الموصل لعام 2003وتقدير القيم المفقودة

T	X(t)	Estimate
1	3.7	
2	Mis	5.2
3	Mis	5.8
4	6.1	
5	Mis	10.9
6	16.2	
7	21.1	
8	24.2	
9	24.5	
10	19.4	

وحسب المعادلة (30). ومن خلال تعويض المشاهدات المعلومة $t = 1,4,6,7,8,9,10$

$$\prod_0(1) = 45360$$

$$\prod_1(4) = -2160$$

$$\prod_2(6) = 240$$

$$\prod_3(7) = -108$$

$$\prod_4(8) = 112$$

$$\prod_5(9) = -240$$

$$\prod_6(10) = 1296$$

ولحساب القيمة المفقودة $t = 2$ نعوض في المعادلة (30) ونحصل على

$$\prod_0(2) = 13440 \qquad \prod_4(2) = -2240$$

$$\prod_1(2) = -6720 \qquad \prod_5(2) = -1920$$

$$\prod_2(2) = -3360 \qquad \prod_6(2) = -1680$$

$$\prod_3(2) = -2688$$

ثم نعوض هذه القيم في صيغة لاكرانج معادلة (27)

$$\boldsymbol{X}(2) = \frac{\prod_0(2)}{\prod_0(1)}\,3.7 + \frac{\prod_1(2)}{\prod_1(4)}\,6.1 + \frac{\prod_2(2)}{\prod_2(6)}\,16.2 + \frac{\prod_3(2)}{\prod_3(7)}\,21.1 + \frac{\prod_4(2)}{\prod_4(8)}\,24.2 + \frac{\prod_5(2)}{\prod_5(9)}\,24.5 + \frac{\prod_6(2)}{\prod_6(10)}\,19.4$$

$$\mathbf{X}(2) = 5.2$$

ولحساب القيمة المفقودة $t = 3$ نعوض في المعادلة (30) ونحصل على

$$\prod_0(3) = 2520 \qquad \prod_4(3) = 1008$$

$$\prod_1(3) = -5040 \qquad \prod_5(3) = 1022$$

$$\prod_2(3) = 1680 \qquad \prod_6(3) = 720$$

$$\prod_3(3) = 1260$$

ثم نعوض هذه القيم في صيغة لاكرانج معادلة (27)

$$\boldsymbol{X}(3) = \frac{\prod_0(3)}{\prod_0(1)}\,3.7 + \frac{\prod_1(3)}{\prod_1(4)}\,6.1 + \frac{\prod_2(3)}{\prod_2(6)}\,16.2 + \frac{\prod_3(3)}{\prod_3(7)}\,21.1$$

$$+\frac{\prod_4(3)}{\prod_4(8)}\ \mathbf{24.2}+\frac{\prod_5(3)}{\prod_5(9)}\ \mathbf{24.5}+\ \frac{\prod_6(3)}{\prod_6(10)}\ \mathbf{19.4}$$

$$\mathbf{X(3)=5.8}$$

ولحساب القيمة المفقودة $t = 5$ نعوض في المعادلة (30) ونحصل على

$$\prod_0(5) = -120 \qquad \prod_4(5) = 160$$

$$\prod_1(5) = -480 \qquad \prod_5(5) = 120$$

$$\prod_2(5) = 480 \qquad \prod_6(5) = 96$$

$$\prod_3(5) = 240$$

ثم نعوض هذه القيم في صيغة لاكرانج معادلة (27)

$$X(5)=\frac{\prod_0(5)}{\prod_0(1)}\ \mathbf{3.7}+\frac{\prod_1(5)}{\prod_1(4)}\ \mathbf{6.1}+\frac{\prod_2(5)}{\prod_2(6)}\ \mathbf{16.2}+\frac{\prod_3(5)}{\prod_3(7)}\ \mathbf{21.1}$$

$$+\frac{\prod_4(5)}{\prod_4(8)}\ \mathbf{24.2}+\frac{\prod_5(5)}{\prod_5(9)}\ \mathbf{24.5}+\ \frac{\prod_6(5)}{\prod_6(10)}\ \mathbf{19.4}$$

$$\mathbf{X(5)=10.6}$$

الاستنتاجات

من خلال تطبيق الطرائق العددية الاربعة [المربعات الصغرى – الشريحة التكعيبية – الفروق المقسومة – استكمال لاكرانج] على معدلات درجات الحرارة العظمى لمدينة الموصل لعام 2001 وعلى فرض ان ثلاث قيم من المشاهدات مفقودة ليتسنى لنا مقارنة القيم الناتجة مع القيم الحقيقية وكانت النتيجة كالاتي:

1. افضل طريقة هي الاستكمال اللاكرانجي وذلك من خلال حساب معدلات الخطأ المطلق لكل طريقة حيث تمتاز هذه الطريقة بالدقة العالية حيث ان معدل الخطأ المطلق صغير.
2. يمكن ترتيب الطرق حسب معدل الخطأ الناتج حيث تكون طريقة المربعات الصغرى بالمرتبة الثانية ثم الفروق المقسومة بالمرتبة الثالثة واخيراً الشريحة التكعيبية بالمرتبة الرابعة.

3. من خلال تطبيق طريقة الاستكمال اللاكرانجي على معدلات درجات الحرارة العظمى والصغرى المفقودة لعام 2003 ظهرت نتائج جيدة وذلك لكونها متجانسة مع القيم.

التـوصـيـات

على ضوء الاستنتاجات الواردة اعلاه نقترح ما يلي:

1. نقترح باستخدام طريقة الاستكمال اللاكرانجي في تقدير القيم المفقودة في السلاسل الزمنية التي تمثل عناصر المناخ كمعدلات شهرية او بشكل قطاع ويمكن مقارنتها مع طرق تقديرية اخرى لمعرفة كفاءة هذه الطريقة.
2. نوصي باستخدام هذه الطريقة في حالة فقدان بعض المشاهدات في السلاسل الزمنية التي تخص المجالات الاقتصادية والزراعية ومجالات الاتصالات وذلك للحاجة الماسة لهذه القيم في بناء النماذج الرياضية والهندسية.

المصادر

[1] عبد العزيز ، بثينة عبد الجادر " طرق تقدير القيم المفقودة في السلاسل الزمنية في مجال الانواء الجوية " 1994 م، اطروحة دكتوراه غير منشورة . جامعة بغداد / كلية الادارة والاقتصاد.

[2] وزارة النقل / الهيئة العامة للانواء الجوية العراقية والرصد الزلزالي قسم المناخ / بيانات غير منشورة.

[3] Kreyszing Erwin "Advanced Engineering Mathematics" 1979 Fourth Edition.

[4] Chi Fung, David Sheung "Methods for the Estimation of Missing Values in time Series" 2006. A thesis Submitted to the Faculty of Communications. Health and Science. Edith Cowan University Perth, Western Australia.

[5] Riwa "Estimating Missing Values in the Time Series", Web Site: www.riwa-rijn.org/.../174-Estimating Mis ...

The Numerical Methods to Estimation the Missing Values of Data in Time Series.

Intisar M. Jassim
Intisar_majeed@yahoo.com
Al-Mustanisirya University
College of Administration and Economics - Statistics Department

Abstract: *This Research discuss the estimation of presumptive missing Values of time Series which assume mean maximal temperature degree in AL-Musil for(2001) in numerical methods (Least Squares – Cubic Spline – divided differences – Lagrange interpolation). Then Comparison between these methods to find the best method for estimation the missing values in the mean maximal and minimal temperature degree in AL-Musil for (2003).*

Keywords: Missing values, Least square, Cubic splaine, Divided differences, Lagrange interpolation.